Корреляция во времени

Ошибки в виде авторегрессионного процесса первого порядка

Ситуация: наблюдения временного ряда статистически зависимы в разные моменты времени (авторегрессионные зав-ти (t^o), сезонные модели).

$\Rightarrow$ некоррелированность случайных ошибок не выполняется.

Обычный МНК $\rightarrow$ оценка $\hat{\beta}$ несмещ. + состоят.

$\searrow$ оценки $\widehat{Var}(\hat{\beta})$ смещённые, причём в сторону уменьшения.

Рассмотрим модель множеств. регрессии:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \ldots + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t, \quad t = \overline{1,n},$$

$$Corr(\varepsilon_t, \varepsilon_s) \neq 0 \quad \forall t \neq s.$$

Пусть случайные ошибки ε_t, $t=\overline{1;n}$ образуют авторегрессионный процесс первого порядка $AR(1)$:

$$\varepsilon_t = \rho\,\varepsilon_{t-1} + v_t, \qquad (1)$$

где v_t, $t=\overline{1;n}$ – последовательность независимых нормально распределённых случ. величин: $E(v_t)=0$, $Var(v_t)=\sigma_v^2$,

$v_t \sim N\{0;\sigma_v^2\}$.

$|\rho|<1$ – условие стационарности процесса авторегрессии.

$\varepsilon_t(1-\rho L)=v_t$
$1-\rho z=0$
$z=\frac{1}{\rho} \Rightarrow$
$|z|>1 \Rightarrow$
$|\rho|<1$.

И пусть ε_0 – нормальная случ. вел-на:

$$E(\varepsilon_0)=0,\ Var(\varepsilon_0)=\frac{\sigma_v^2}{1-\rho^2},$$

не зависящая от v_t, $t=\overline{1;n}$.

т.е. $\varepsilon_0 \sim N\left\{0;\ \frac{\sigma_v^2}{1-\rho^2}\right\}$,

$$Corr(\varepsilon_0; v_t)=0\ \forall t=\overline{1;n}.$$

Проверим параметры распределения ε_0:

$$E(\varepsilon_t)=\rho\cdot(E(\varepsilon_{t-1}))+E(v_t) \Rightarrow E(\varepsilon_t)=0,\ t=\overline{1;n}.$$

$\overset{д.б.}{\Rightarrow} E(\varepsilon_0)=0$ (для стац-ти).

$Corr(\varepsilon_{t-1}; v_t) = 0$ - по опред.

$$Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) - E^2(\varepsilon_t) = E((\rho\varepsilon_{t-1} + v_t)^2) =$$

$$= \rho^2 E(\varepsilon_{t-1}^2) + E(v_t^2) + 2\rho \underbrace{E(\varepsilon_{t-1} \cdot v_t)}_{0} =$$

$$= \rho^2 E(\varepsilon_{t-1}^2) + \sigma_v^2.$$

$$E(\varepsilon_t^2) = \rho^2 E(\varepsilon_{t-1}^2) + \sigma_v^2 =$$

$$= \rho^2(\rho^2 E(\varepsilon_{t-2}^2) + \sigma_v^2) + \sigma_v^2 = \ldots$$

$$= \rho^{2t} E(\varepsilon_0^2) + \sigma_v^2(1 + \rho^2 + \ldots + \rho^{2t}) =$$

$$= \rho^{2t} E(\varepsilon_0^2) + \frac{1-\rho^{2t}}{1-\rho^2}\sigma_v^2$$

Т.о., если $\varepsilon_0 \sim N\left\{0; \frac{\sigma_v^2}{1-\rho^2}\right\}$, то

$$Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma_v^2}{1-\rho^2}$$ - усл.2 стац.

Умножим (1) на ε_{t-1}:

$$E(\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1}) = E[(\varepsilon_t - E(\varepsilon_t)) \cdot (\varepsilon_{t-1} - E(\varepsilon_{t-1}))] =$$

$$= Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = \rho Var(\varepsilon_{t-1}) = \rho\sigma_\varepsilon^2. \quad (2)$$

независ. ε_{t-1} и v_t

...

$$\Rightarrow Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-m}) = \rho^m \sigma_\varepsilon^2.$$

Следовательно,

$\varepsilon_t,\ t=\overline{1,n}$ – стационарный в широком смысле случайный процесс

Из (2) следует, что

$$\rho=\frac{Cov(\varepsilon_t,\varepsilon_{t-1})}{\sigma_\varepsilon^2}=\frac{Cov(\varepsilon_t,\varepsilon_{t-1})}{\sqrt{\sigma_{\varepsilon_t}^2}\sqrt{\sigma_{\varepsilon_{t-1}}^2}},$$ т.к. дисп. ε_t постоян.

Тогда мат-ца ковариации:

$$\Omega=\frac{\sigma_\vartheta^2}{1-\rho^2}\begin{bmatrix}1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-1}\\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n-2}\\ \rho^2 & \rho & 1 & \dots & \rho^{n-3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \dots & 1\end{bmatrix}$$

Оценивание модели с шумами в виде процесса авторегрессии.

1. ρ - известно.

Взвеш. МНК не подходит, т.к. Ω не диагональна.

Применим обобщён. МНК:

$$\hat{\beta}^* = (X^T\Omega^{-1}X)^{-1}X^T\Omega^{-1}y.$$

Необходима м-ца P: $P^T P = \Omega^{-1}$.

Запишем ур-ие модели для $t-1$:

$$y_{t-1} = \beta_1 + \beta_2 x_{t-1,2} + \dots + \beta_k x_{t-1,k} + \varepsilon_{t-1}. \quad \Big|\cdot\rho \qquad (4)$$

$$y_t - \rho y_{t-1} = (x_t - \rho x_{t-1})^T \beta + v_t, \quad (3)$$

где $x_t = \begin{bmatrix} 1 \\ x_{t_2} \\ \vdots \\ x_{t_k} \end{bmatrix}$, $x_{t-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ x_{t-1,2} \\ \vdots \\ x_{t-k,2} \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}$

(3) подходит $\forall t \neq 1$.

Пусть $t=1$, тогда умножим ур-ие (4) для y_{t-1} на $\sqrt{1-\rho^2}$:

$$\sqrt{1-\rho^2}\, y_1 = \sqrt{1-\rho^2}\, x_1^T \beta + \sqrt{1-\rho^2}\, \varepsilon_0 \quad (5)$$

6

Т.о., система (3) + (5) удовлетворяют условиям обычная регрес. модели, т.к. 1) $v_t \sim N\{0; \sigma_v^2\}$,

2) ε_t не зависит от v_t, $t=\overline{1,n}$,

3) $Var(\varepsilon_t) = \dfrac{\sigma_v^2}{1-\rho^2}$.

Практич. замеч

Часто на практике используют только (3) без (5) для единообразия + так как при больших выборках оценки $\hat{y}_t$ быстро стабилизируются (уходит влияние первого наблюдения y_1 и его ошибки ε_1)

Если выборка наблюдений мала, то лучше (3)+(5).

(2) ρ - неизвестно.
В этом случае используют итеративные процедуры оценивания $\hat{y}_t$ при неизвестном ρ.

Процедура Кохрейна-Оркатта (Cochrane- Orcutt)

шаг 0. применим обычн. МНК к системе: $y = X\beta + \varepsilon$ и получим вектор остатков $e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$.

шаг 1: применим обычн. МНК к системе: $e_t = \rho e_{t-1} + \nu_t$, получим значение $\hat{\rho}$.

шаг 2 значение $\hat{\rho}$ подставляется в (4) или (4)+(5), к полученной системе ур.-ий применяется обычн. МНК, получаем вектор $\hat{\beta}$.

шаг 3 строится новый вектор остатков $e = y - X\hat{\beta}$

шаг 4. повтор шагов 1 - 3.

Процедура Хилдрета - Лу (Hildreth - Lu).

ρ изменяется в интервале $(-1; 1)$.

Шаг 1 из интервала $(-1;1)$ берутся значения ρ с постоянным шагом α, $(0{,}1; 0{,}05; \ldots)$ для каждого из выбранных значений проводится оценивание системы (3) и определяется, при каком ρ сумма квадратов отклонений в (3) минимальна?

Шаг 2 для выбранного ρ_1 на шаге 1 берётся интервал $(\rho_1 - \varepsilon; \rho_1 + \varepsilon)$, новый шаг $\alpha_1 < \alpha$ и повторяется шаг 1.

Процедура Дарбина (Durbin)

Перенесём ρy_{t-1} в (3) в правую часть:

$$y_t = \beta_1(1-\rho_1) + \rho y_{t-1} + \beta_2 x_{t2} - \rho\beta_2 x_{t-1,2} + \ldots +$$

$$+ \beta_k x_{tk} - \rho\beta_k x_{t-1,k} + v_t. \qquad (6)$$

Таким образом, в преобразованном выражении y_{t-1} включается в число регрессоров, а ρ в число оцениваемых параметров.

<u>Шаг 1</u>

Применим к (6) обычный МНК.

Получим оценки $\hat{\rho}$, $\widehat{\rho\beta_j}$.

В качестве $\hat{\beta}_j$ возьмём $\dfrac{\widehat{\rho\beta_j}}{\hat{\rho}}$.

<u>Доп. шаг</u>. можно улучшить оценки $\hat{\beta}_j$, если подставить в (5) $\hat{\rho}$ и к полученному ур-ию применить обычный МНК.

... Дарбина – Уотсона на ...

корреляции по времени

Идея: если корреляция ошибок есть, тоже есть и у остатков.

Пусть $H_0: \rho = 0$

при альтернативе $H_1: \rho \neq 0$ или

$H_1: \rho > 0.$

Статистика теста Д-У:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n} (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

После преобразований (см. Магнус) получаем, что

$$DW \approx 2(1 - r), \text{ где}$$

коэф-т корреляции $r = Corr(e_t, e_{t-1})$:

$$r \approx \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

Смысл статистики: если e_t и e_{t-1} близки, то ~~[illegible]~~ DW мало или если r близок к 1, то $DW \to 0$, а при $r \to 0$ $DW \to 2$.

Т.о., если бы распределение статистики DW было известно, то задача была бы решена: берем кр. знач. d^* из табл. при ур. не знач. α, сравниваем: DW и d^*, если $DW > d^*$, то H_0 не отверг.

Проблема в том, что DW зависит:
- от числа наблюдений n,
- кол-ва регрессоров k
- от всех значений м-цы X

$\Rightarrow$ невозможно составить таблицу критич. значений d^* для $\forall X$.

1951 Дарбин и Уотсон нашли значения d_u и d_e:

верхняя нижняя
границы

$d_u(n; k, \alpha)$, $d_e(n, k, \alpha)$ - нет зав-ти от м-цы X

и доказали, что если:

$DW > d_u$, то $DW > d^* \Rightarrow H_0$ не отв.

$DW < d_e$, то $DW < d^* \Rightarrow H_0$ отв.

Если $d_e < DW < d_u$, то неопределенность

Например, если проверяем гипотезу

$H_0: \rho = 0$

$H_1: \rho < 0$

то получаем след. таблицу:

DW	
$4-d_l < DW < 4$	H_0 отв, H_1 не отв.
$4-d_u < DW < 4-d_l$	неопределённость
$d_u < DW < 4-d_u$	H_0 не отв.
$d_l < DW < d_u$	неопределённость
$0 < DW < d_l$	H_0 отв., есть положе. корреляция.

<u>Замечание</u>. Тест Д.-У работает при условии, что регрессоры $x_1, \ldots x_k$ некоррелир. со случ. ошибками $\varepsilon_t, t=\overline{1,n}$ т.е. его нельзя применять для врем. рядов, которые описываются уравнениями авторегрессии $AR(p)$

Системы регрессионных уравнений

(1) Внешне не связанные уравнения

(наличие корреляции между случ. ошибками в разных регрес. ур. них)

Пусть y_t, z_t – объём инвестиций

x_{t_1}, p_{t_1} – доход предприятия

x_{t_2}, p_{t_2} – капитал

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t_1} + \beta_3 x_{t_2} + \varepsilon_t, \quad t = \overline{1;n}$$

$$z_t = \gamma_1 + \gamma_2 p_{t_1} + \gamma_3 p_{t_2} + u_t, \quad t = \overline{1;n}$$

$\{y_t, z_t\}$ $\{$СБ, ВТБ$\}$, $\{$Роснефть, Сургутнефтегаз$\}$

рассматривать по отдельности => терять информацию.

Предположим, что ε_t и u_t коррелир.

Для оценивания используется доступный обобщённый МНК.

Даны M регрессионных ур-ний:

$$\begin{cases} y_1 = X_1\beta_1 + \varepsilon_1 \\ y_2 = X_2\beta_2 + \varepsilon_2 \\ \dots \\ y_M = X_M\beta_M + \varepsilon_M \end{cases} \qquad (1)$$

$y_i \sim (n \times 1)$ $\qquad i = \overline{1;M}$

$X_i \sim (n \times k_i)$

$\beta_i \sim (k_i \times 1)$

$\varepsilon_i \sim (n \times 1)$

Пусть $E(\varepsilon_i) = 0,\ E(\varepsilon_{is}\varepsilon_{jt}) = \sigma_{ij},\ t = s$

$E(\varepsilon_{is}\varepsilon_{jt}) = 0,\ t \neq s.$

$$E(\varepsilon_i \varepsilon_j^T) = \sigma_{ij} I_n,\ i,j = \overline{1;M}.$$

Т.е. случ. ошибки коррел. в один момент времени и некоррел. в разные.

Обозначим: $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & X_M \end{bmatrix}$

$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_M \end{bmatrix}$, $\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_M \end{bmatrix}$, $\Sigma = (\sigma_{ij}),\ i,j = \overline{1;M}.$

Тогда система (1): (3)

$$y = X\beta + \varepsilon. \qquad (2)$$

с ковариационной матрицей:

$$E(\varepsilon\varepsilon^T) = \Omega = \Sigma \otimes I_n.$$

произв. Кронекера.

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

Предполагаем, что м-ца Σ невырожд.
Тогда к системе (2) применим обобщ. МНК. (т. Айткена), в которой $Var(\varepsilon) = \Omega$, $\Omega \geq 0$ в отличие от предыдущей лекции, когда $Var(\varepsilon) = \sigma^2 I_n$:

$$\hat{\beta}_{GLS} = (X^T\Omega^{-1}X)^{-1}X^T\Omega^{-1}y = \qquad (3)$$

$$= (X^T(\Sigma^{-1} \otimes I_n)X)^{-1}X^T(\Sigma^{-1} \otimes I_n)y.$$

$$(\text{т.к. } (A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}).$$

Оценка вида (3) отличается от оценки обычного МНК.

Эти оценки совпадают в след. случаях:

1) Уравнения в (1) не связаны друг с другом, т.е. $\sigma_{ij}=0,\ i\neq j$

2) все уравнения имеют один и тот же набор регрессоров, т.е. $X_1 = X_2 = \ldots = X_M$.

Как оценить матрицу Σ -?

Один из вариантов:

1) применить к каждому ур-нию (1) обычный МНК и получить вектор остатков $e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_M \end{bmatrix}$

2) взять в качестве $\hat{\sigma}_{ij} = \dfrac{e_i^T e_j}{n},\ i,j=\overline{1,M}$.

Оценки $\hat{\sigma}_{ij}$ состоятельны.

(2.) Системы одновременных уравнений

Пример: Q_t^S - предложение товара A

Q_t^D - спрос товара A.

P_t - цена товара

Y_t - доход в момент времени t.

Запишем кривые спроса и предложения.

$$\begin{cases} Q_t^S = \alpha_1 + \alpha_2 P_t + \varepsilon_t \text{ (предложение)} \\ Q_t^D = \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 Y_t + u_t \text{ (спрос).} \end{cases} \quad (4)$$

Пусть существует на рынке точка равновесия:

$$Q_t^S = Q_t^D = Q_t .$$

Система (4) в отклонениях:

$$\begin{cases} q_t = \alpha_2 p_t + \varepsilon_t \\ q_t = \beta_2 p_t + \beta_3 y_t + u_t \end{cases} \quad (4^*)$$

Переменные по содержанию модели:

– Эндогенные, определяются внутри системы, одновременно.

– Экзогенные, определяются вне системы.

В (4*) q_t и p_t – эндогенные

y_t – экзогенная

Предполагается, что экзогенные переменные некоррелируемы со случайными ошибками ур-ний,

Например в (4*) y_t некорр. с u_t и ε_t.

Разрешив систему (4*), получим:

$$\begin{cases} q_t = \dfrac{\alpha_2 \beta_1 y_t}{\alpha_2 - \beta_2} + \dfrac{\alpha_2 u_t - \beta_2 \varepsilon_t}{\alpha_2 - \beta_2} \\ p_t = \dfrac{\beta_3 y_t}{\alpha_2 - \beta_2} + \dfrac{u_t - \varepsilon_t}{\alpha_2 - \beta_2} \end{cases} \quad (4**)$$

$$Cov(p_t, \varepsilon_t) = \frac{Cov(u_t, \varepsilon_t) - Var(\varepsilon_t)}{\alpha_2 - \beta_2} \neq 0.$$

$\Rightarrow$ p_t коррел. с ε_t и $\Rightarrow$ применение обычного МНК даёт смещённые несостоятельные оценки.

(7)

Доказательства смещ. + несост. есть в Магнусе.

Система вида (4*) носит название ~~структурная~~ форма модели.

Система вида (4 **) - приведённая форма модели

Замена переменных:

$$\pi_1 = \frac{\alpha_2 \beta_3}{\alpha_2 - \beta_2}, \quad \pi_2 = \frac{\beta_3}{\alpha_2 - \beta_2},$$

$$V_{1t} = \frac{\alpha_2 u_t - \beta_2 \varepsilon_t}{\alpha_2 - \beta_2}, \quad V_{2t} = \frac{u_t - \varepsilon_t}{\alpha_2 - \beta_2}.$$

Тогда (4**):

$$\begin{cases} q_t = \pi_1 y_t + V_{1t} \\ p_t = \pi_2 y_t + V_{2t} \end{cases}$$

Здесь экзогенная переменная y_t некоррел. со случ. ошибками V_{1t} и V_{2t} =>

применение обычного МНК даёт оценки $\hat{\pi}_1$ и $\hat{\pi}_2$ состоятельные.

8

$$\alpha_2 = \frac{\pi_1}{\pi_2} \Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{\hat{\pi}_1}{\hat{\pi}_2}$$ – состоятельная оценка α (по т. Слуцкого).

Метод оценки структурных коэффициентов модели с помощью оценок коэффициентов приведённой формы –

Косвенный МНК.